

Examen, MA1A2 Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2008/2 (29 de Noviembre)

Instrucciones: Este examen consta de varias preguntas con diferente puntaje cada una. Al contestar correctamente todas las preguntas obtendrá 18 puntos con lo cual sacará un 7.0. Si contesta correctamente sólo algunas preguntas (o partes) y obtiene N puntos, su nota en el examen será $N_{Ex} = \frac{N}{18} * 6 + 1$.

P1) (2 pts.) Determine el área de la región del plano limitada en el primer cuadrante por las curvas de ecuación $xy = 1$, $xy = 8$, $y = x^2$, $y = 8x^2$.

Pauta:	Intersección $xy = 1$ con $y = x^2$: $x = y = 1$.	
	Intersección $xy = 1$ con $y = 8x^2$: $x = \frac{1}{2}$, $y = 2$.	
	Intersección $xy = 8$ con $y = x^2$: $x = 2$, $y = 4$.	
	Intersección $xy = 8$ con $y = 8x^2$: $x = 1$, $y = 8$	1 pto.
	Fórmula para el área: $A = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(8x^2 - \frac{1}{x}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{8}{x} - x^2\right) dx$	0.5 pto.
	Resultado: $A = 7 \ln 2$	0.5 pto.

P2) (1 pts.) Estudiar la convergencia de la integral impropia $\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x + x} dx$.

Pauta:	Basta comparar con $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.	
	En efecto: $\frac{x^3}{e^x + x} \rightarrow 0$ por lo tanto la función $\frac{1}{x^2}$ domina a $\frac{x}{e^x + x}$	0.5 pto.
	Como $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, la integral pedida es también convergente.	0.5 pto.

P3) (2 pts.) Usando el criterio de la integral y verificando sus hipótesis, demuestre que $\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x^x} dx$ converge.

Pauta:	Claramente la función $f(x) = \frac{e^x}{x^x}$ es no negativa. Veamos que es decreciente calculando $f'(x)$.	
	$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e}{x}\right)^x = \frac{d}{dx} \exp(x(1 - \ln x)) = -f(x) \ln x < 0$	1.0 pto.
	El comportamiento de la integral es igual al de la serie $\sum \left(\frac{e}{n}\right)^n$.	
	Usando criterio d la raíz enésima se tiene que $\sqrt[n]{a_n} = \frac{e}{n} \rightarrow 0 < 1$. Por lo tanto la serie converge.	1.0 pto.

- P4)** (2.5 pts.) Obtenga un desarrollo en serie de potencias para la función $f(x) = \ln(1+x^2)$.
(Indicación: Comience por desarrollar la derivada en la forma $f'(x) = 2x \sum a_n x^n$)

Pauta:	Cálculo de $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} = 2x \cdot \frac{1}{1+x^2}$	0.5 pto.
	Se sabe que $\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + \dots$. Por lo tanto se tiene que: $f'(x) = 2x(1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - + \dots)$	0.5 pto.
	Es decir $f'(x)$ es la serie de potencias: $f'(x) = 2x - 2x^3 + 2x^5 - 2x^7 + 2x^9 - \dots \left(= \sum (-1)^n 2x^{2n+1} \right).$	0.5 pto.
	Integrando se tiene que $f(x) = C + x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + - \dots \left(= C + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n} \right).$	0.5 pto.
	La constante de integración se obtiene de considerar que $f(x) = \ln 1 = 0$. Luego $C = 0$	0.5 pto.

- P5)** (1.5 pts.) Estudie la continuidad y derivabilidad en $x_0 = 0$ de la función $f(x) = e^{-|x|}$.

Pauta:	Por ser las funciones $ x $ y \exp continuas en \mathbb{R} , f es continua en x_0	0.5 pto.
	La derivada existe ssi existe el siguiente límite: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{- h } - 1}{h}$ Usando límites laterales, se tiene que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{- h } - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-h} - 1}{h} = -1$	0.3 pto.
	y $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{- h } - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^h - 1}{h} = 1$	0.3 pto.
	Por ser distintos, se concluye que la función no es derivable en x_0	0.4 pto.

- P6)** (3 pts.) Una partícula recorre una distancia de $s = 5$ unidades por la curva $\vec{r}(t) = (3\sin t, 4t, 3\cos t)$ partiendo en $t = 0$ del punto $(0, 0, 3)$. Determine donde se encuentra ahora la partícula y cuanto vale en ese punto la curvatura.

Pauta:	Derivando se tiene que $\vec{r}'(t) = (3\cos t, 4, -3\sin t)$.	
	Por lo tanto $s'(t) = 5$.	0.5 pto.
	La partícula recorre 5 unidades cuando $t = 1$.	0.5 pto.
	En ese instante se encuentra en $(3\sin 1, 4, 3\cos 1)$.	0.5 pto.
	$T(t) = \frac{1}{5}(3\cos t, 4, -3\sin t)$.	0.5 pto.
	Derivando de nuevo: $T'(t) = \frac{1}{5}(-3\sin t, 0, -3\cos t)$.	0.5 pto.
	Por lo tanto la curvatura vale $\kappa(t) = \frac{3}{25}$ en cualquier instante.	0.5 pto.

- P7)** (2 pts.) Usando comparaciones apropiadas, estudie la convergencia de las series $\sum \frac{1}{1 + \ln n}$ y $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$.

Pauta:	Usando la desigualdad $\ln n \leq n - 1$ se tiene que $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{1 + \ln n}$. Por lo tanto la primera serie es divergente.	1.0 pto.
	Comparando por cociente: $\frac{n^{3/2}\sqrt{n}}{n^2+1} \rightarrow 1$. Por lo tanto la segunda serie es convergente igual que la serie $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$	1.0 pto.

- P8)** (2 pts.) Calcule $\int \frac{d}{dx} \left((x+1)^2 + x^2 \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{x+1} \right) dx$

Pauta:	Integrando por partes se tiene que:	
	$= \left((x+1)^2 + x^2 \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{x+1} \right) - \int \left((x+1)^2 + x^2 \right) \frac{d}{dx} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{x+1} \right) dx$	
	0.8 pto.
	Pero $\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{x+1} \right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x+1} \right)^2} \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2 + x^2}$	0.8 pto.
	De donde la integral pedida vale	
	$\left((x+1)^2 + x^2 \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{x+1} \right) - x + C$	
	0.4 pto.

- P9)** (2 pts.) Calcule el límite de la siguiente suma de Riemann: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin \left(\frac{i\pi}{2n} \right) \frac{i}{n^2}$

Pauta:	El límite es igual a la integral $\int_0^1 \sin \left(\frac{\pi}{2}x \right) x dx$.	1.0 pto.
	Integrando por partes con $u = x$ y $dv = \sin \left(\frac{\pi}{2}x \right) dx$ se tiene que:	
	$= -x \left(\frac{2}{\pi} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2}x \right) \Big _0^1 + \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2}x \right) dx = \left(\frac{2}{\pi} \right)^2.$	
	1.0 pto.